

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА О КОЛЕБАНИИ ШТАМПА НА СЛОЕ

Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова

Рассматривается плоская задача о вибрации штампа, лежащего без трения на упругом слое толщины h , жестко сцепленном с недеформируемым основанием.

Движение среды описывается уравнениями Ляме:

$$(\lambda + \mu)\text{grad div } \underline{U} + \mu \Delta \underline{U} = \rho \frac{\partial^2 \underline{U}}{\partial t^2}.$$

Здесь $\underline{U} = \{u, w\}$;

λ, μ — коэффициенты Ляме;
 ρ — плотность среды.

На поверхности слоя в области $x \in [-b, b]$ заданы вертикальные перемещения штампа, изменяющиеся по гармоническому закону.

Граничные условия имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} w(x, t) &= w(x)e^{-i\omega t}; & |x| &\leq b; \\ \tau_{xz} &= 0, & |x| &\leq b; \\ \sigma_z = \tau_{xz} &= 0, & |x| &> b; \end{aligned} \right\} z = h$$

$$u = w = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad z = 0.$$

Методом интегральных преобразований краевая задача сводится к решению интегрального уравнения относительно неизвестного контактного напряжения под штампом:

$$\int_{-a}^a q(\xi)k(x - \xi)d\xi = 2\pi f(x), \quad |x| < a. \quad (1)$$

Здесь $q(x) = \sigma_z(hx)/\mu$;
 $f(x) = w(hx)/h, \quad a = b/h$;

$$k(x) = \int_{\sigma} K(\alpha)e^{-i\alpha x} d\alpha;$$

$$K(\alpha) = x_2^2 \sigma_1 (\sigma_1 \sigma_2 \text{sh } \sigma_1 \text{ch } \sigma_2 - \alpha^2 \text{ch } \sigma_1 \text{sh } \sigma_2) /$$

$$| < 4 \{ (2\alpha^4 - \alpha^2 x_2^2) \sigma_1 \sigma_2 - (2\alpha^4 - \alpha^2 x_2^2 + 0,25x_2^4) \times$$

$$\times \sigma_1 \sigma_2 \text{ch } \sigma_1 \text{ch } \sigma_2 + \alpha^2 [2\alpha^4 - \alpha^2 (x_1^2 + 2x_2^2) +$$

$$+ 0,25x_2^2 + x_1^2 x_2^2] \text{sh } \sigma_1 \text{sh } \sigma_2 \} > .$$

Здесь

$$\sigma_k = \sqrt{\alpha^2 - x_k^2}; \quad \text{Re } \sigma_k \geq 0; \quad \text{Im } \sigma_k \leq 0; \quad k = 1, 2;$$

$$x_1^2 = \frac{\rho h^2 \omega^2}{\lambda + 2\mu}; \quad x_2^2 = \frac{\rho h^2 \omega^2}{\mu}.$$

Корректность постановки задачи обеспечивается при выполнении физического принципа предельного поглощения, что достигается выбором контура σ специальным образом [1],

Для большинства значений параметра x_2 контур σ совпадает с вещественной осью и обходит положительные вещественные нули и полюсы функции $K(\alpha)$ снизу, а отрицательные — сверху.

Ядро интегрального уравнения (1) допускает факторизацию относительно контура σ вида:

$$K(\alpha) = K_+(\alpha) K_-(\alpha),$$

где $K_+(\alpha), K_-(\alpha)$ регулярны в области, лежащей выше или ниже контура σ , соответственно.

В этом случае решение уравнения (1) имеет вид [2—4]:

$$q(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \left[\frac{F(\alpha)}{K(\alpha)} + \frac{X^+(-\alpha) + X^-(-\alpha)}{2K_-(\alpha)} e^{i\alpha x} + \right. \\ \left. + \frac{X^+(\alpha) - X^-(\alpha)}{2K_+(\alpha)} e^{-i\alpha x} \right] e^{-i\alpha x} d\alpha. \quad (2)$$

Здесь $X^{\pm}(\alpha)$ являются решениями интегральных уравнений Фредгольма второго рода:

$$X^{\pm}(\alpha) \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{X^{\pm}(\xi)R(\xi)}{\xi + \alpha} d\xi = T^{\pm}(\alpha),$$

где $R(\alpha) = \frac{K_-(\alpha)}{K_+(\alpha)} e^{-2i\alpha a}$;

$$T^{\pm}(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \left[- \frac{F(\xi)e^{-i\alpha\xi}}{K_+(\xi)(\xi + \alpha)} \pm \right. \\ \left. \pm \frac{F(\xi)e^{i\alpha\xi}}{K_-(\xi)(\xi - \alpha)} \right] d\xi; \quad (3)$$

$$F(\xi) = \int_{-a}^a f(x)e^{i\xi x} dx.$$

Основную трудность для эффективного использования представления (2) вызывает необходимость факторизации функции $K(\alpha)$ относительно контура σ .

Для преодоления этой трудности производится приближенная факторизация, впервые обоснованная В. А. Бабешко [3]: ядро $K(\alpha)$ аппроксимируется функцией $\tilde{K}(\alpha)$, которая легко факторизуется относительно контура σ .

Функция $\tilde{K}(\alpha)$ подбирается из следующего условия:

$$|K(\alpha) - \tilde{K}(\alpha)| |K^{-1}(\alpha)| (1 + |\alpha|)^{\gamma} < \epsilon, \\ \gamma > 0,5.$$

Известно [3], что при достаточно малом $\epsilon \geq 0$ имеет место и близость решений инте-

гральных уравнений вида (1) с ядрами $K(\alpha)$ и $\tilde{K}(\alpha)$ в некоторой равномерной метрике.

Для построения аппроксимирующей функции $\tilde{K}(\alpha)$ предварительно рассчитываются кривые вещественных нулей и полюсов ядра $K(\alpha)$ в зависимости от безразмерного параметра κ_2 .

Аппроксимация производится по следующей схеме. Пусть $z_i, i=1, 2, \dots, N1$ и $p_j, j=1, 2, \dots, N2$ — положительные вещественные нули и полюса $K(\alpha)$. Введем функцию

$$P(\alpha) = K(\alpha) \frac{\prod_{j=1}^{N2} (\alpha^2 - p_j^2) \sqrt{\alpha^2 + B^2}}{\prod_{i=1}^{N1} (\alpha^2 - z_i^2) S(\alpha)},$$

не имеющую действительных нулей и полюсов и ограниченную на бесконечности, так как на бесконечности $K(\alpha)$ убывает, как $C|\alpha|^{-1}$.

Здесь $B > 0$ — произвольная константа, о выборе которой будет сказано ниже,

$$S(\alpha) = \begin{cases} 1, & N1 = N2, \\ |N1 - N2| \prod_{k=1}^{|N1 - N2|} (\alpha^2 + B_k^2)^{\text{sign}(N2 - N1)}, & \text{иначе} \end{cases}$$

B_k — некоторые константы, $B_k > B$. Произведем замену $\tau = \alpha^2 (\alpha^2 + D^2)^{-1}$, переводящую положительную вещественную ось $0, \infty$ на отрезок $0, 1$ и на отрезке $0, 1$ аппроксимируем функцию $P\left(D\sqrt{\frac{\tau}{1-\tau}}\right)$ полиномом Лагранжа $L_n(\tau)$ (n — степень полинома). Тогда

$$\tilde{K}(\alpha) = \frac{\prod_{j=1}^{N1} (\alpha^2 - z_j^2) S(\alpha)}{\prod_{j=1}^{N2} (\alpha^2 - p_j^2) \sqrt{\alpha^2 + B^2}} L_n\left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + D^2}\right) = C \prod_{j=1}^M (\alpha^2 - r_j^2) (\alpha^2 - s_j^2)^{-1} (\alpha^2 + B^2)^{-0.5}, \quad (4)$$

Здесь $M = n + \max(N1, N2)$;

$$r_i = \begin{cases} z_j & \text{для } j = 1, \dots, N1, \\ u_j & \text{для } j = N1 + 1, \dots, N1 + n, \\ iB_k, & \text{если } N1 < N2, k=1, \dots, N2 - N1 \\ \text{для } j = N1 + n + 1, \dots, M; \end{cases}$$

u_j — нули функции $L_n\left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2 + D^2}\right)$;

$$s_i = \begin{cases} p_j & \text{для } j = 1, \dots, N2, \\ iD & \text{для } j = N2 + 1, \dots, N2 + n, \\ iB_k, & \text{если } N2 < N1, k=1, \dots, N1 - N2 \\ \text{для } j = N2 + n + 1, \dots, M. \end{cases}$$

Факторизуем функцию $\tilde{K}(\alpha)$ вида (4) относительно контура σ :

$$\tilde{K}_+(\alpha) = V \sqrt{c} \cdot \prod_{j=1}^M (r_j + \alpha)(s_j + \alpha)^{-1} (B - i\alpha)^{-0.5};$$

$$\tilde{K}_-(\alpha) = \tilde{K}_+(\alpha)^{-1}.$$

Для выделения однозначных ветвей функций $\sqrt{B - i\alpha}$ и $\sqrt{B + i\alpha}$ точки ветвления $\pm iB$ и $\pm i\infty$ соединяются разрезами вдоль мнимой оси.

Не нарушая общности, положим $f(x) = e^{i\eta x}$. Деформируем контур σ в выражениях (2), (3), в верхнюю или нижнюю полуплоскость (в направлении убывания подынтегральной функции) вплоть до точек ветвления $\pm iB$. Тогда решение уравнения (1) можно записать в следующем виде:

$$q(x) = \frac{e^{i\eta x}}{K(\eta)} + e^{i\eta a} \sum_{k=1}^N \frac{e^{i(a-x)r_k}}{-(\eta + r_k)K_+(r_k)K'_+(-r_k)} + e^{-i\eta a} \sum_{k=1}^N \frac{e^{i(a+x)r_k}}{(\eta - r_k)K_+(r_k)K'_+(-r_k)} + \frac{i}{2} \sum_{k=1}^N \frac{X^+(-r_k) + X^-(-r_k)}{-K'_+(-r_k)} \times$$

$$\times (e^{i r_k(a-x)} + e^{i r_k(a+x)}) + O(e^{-(a-|x|)B}),$$

где $X^\pm(-r_k)$ являются решениями системы:

$$X^\pm(-r_j) \pm \sum_{k=1}^N X^\pm(-r_j) r_{jk} = T^\pm(-r_j) + O(e^{-2aB}). \quad (6)$$

Здесь

$$T^\pm(-r_j) = \frac{ie^{i\eta a}}{\eta + r_j} \left[\frac{1}{K'_+(r_j)} - \frac{1}{K(\eta)} \right] + \frac{ie^{-i\eta a}}{\eta - r_j} \times \left[\mp \frac{1}{K_+(r_j)} \pm \frac{1}{K_+(\eta)} \right] + \sum_{k=1}^N \frac{e^{2air_k}}{K'_+(-r_k)(-r_j - r_k)} \left[\frac{e^{-i\eta a}}{\eta - r_k} \mp \frac{e^{i\eta a}}{\eta + r_k} \right] +$$

$$+ O(e^{-2aB}); \quad N = N1 + n;$$

$$r_{jk} = \frac{K_+(r_k) e^{2air_k}}{K'_+(-r_k)(r_k + r_j)}.$$

Последние слагаемые в выражениях (5), (6) экспоненциально уменьшаются при увеличении a . В случае уменьшения a для сохранения точности результата на заданном уровне необходимо соответственно увеличить V . Однако это приводит к необходимости увеличивать степень полинома $L_n(\tau)$, что в свою очередь приводит к увеличению порядка системы (6).

Порядок системы (6) увеличивается также с ростом κ_2 , так как при этом увеличивается

число вещественных нулей и полюсов функции $K(\alpha)$.

Для получения решения в окрестности краев штампа представим второе и третье слагаемые в подынтегральной функции выражения (2) в виде

$$\sqrt{B+i\alpha} \sum_{k=1}^M A_k(\alpha - z_k)^{-1} e^{i\alpha(a-x)}$$

и

$$\sqrt{B-i\alpha} \sum_{k=1}^M B_k(\alpha + z_k)^{-1} e^{-i\alpha(a+x)}$$

соответственно. Здесь A_k, B_k — известные константы. Сделаем замену в первом случае $p=i\alpha$, во втором $p=-i\alpha$ и воспользуемся известной формулой операционного исчисления:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\sqrt{p+a} \cdot p}{p+b} \frac{e^{pt}}{p} dp = e^{-at}/\sqrt{\pi t} + \sqrt{a-b} e^{-bt} \operatorname{erf} \sqrt{(a-b)t}.$$

Получим при $x \rightarrow a$ $q(x) = D_1(a-x)^{-0,5} + O(1)$, при $x \rightarrow -a$ $q(x) = D_2(a+x)^{-0,5} + O(1)$, D_1, D_2 — известные константы. Таким образом, на краях штампа решение имеет особенности вида $(a \pm x)^{-0,5}$, что совпадает с известным результатом [5].

Составлен пакет программ для решения на ЭЦВМ интегральных уравнений вида (1) с ядрами, обладающими описанными выше свойствами.

Прослежено изменение напряжений $q(x)$ и усилий $P = \int_{-a}^a q(x) dx$ с ростом обобщенной

частоты κ_2 для поставленной выше краевой задачи, особенно при появлении новых особенностей $K(\alpha)$. На рис. 1 изображены напряжения под штампом при $a=5, \eta=1$ и различных значениях κ_2 .

На рис. 2 приводятся графики зависимости усилий от κ_2 при $a=3, \eta=0; 0,5; 1,0$. Усилия обращаются в нуль при $\kappa_2=2,94$. При этом значении κ_2 у ядра $K(\alpha)$ в точке $\alpha=0$ появляется неустранимый двукратный полюс. Физически это соответствует случаю совпадения частоты вибрации штампа с собственной частотой колебаний слоя.

Относительная погрешность аппроксимации во всех расчетах не превышает 1%, за исключением некоторых отрезков изменения

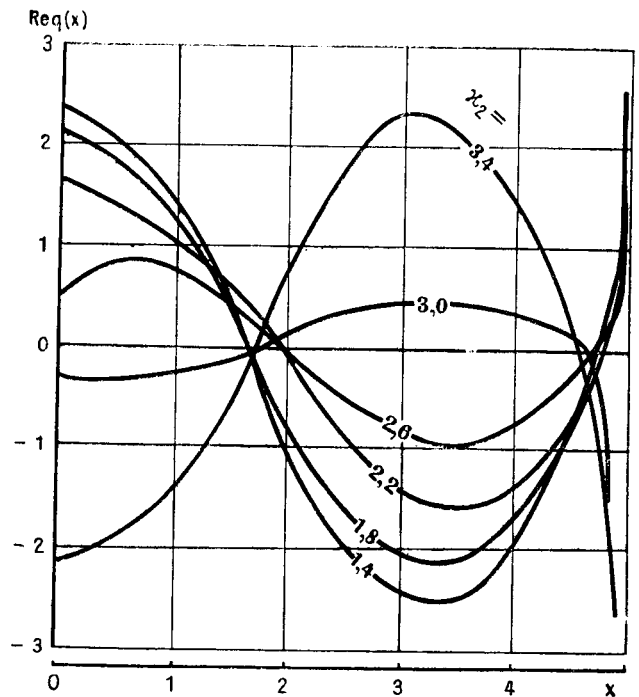


Рис. 1. Напряжения под штампом при $a=5, \eta=1$

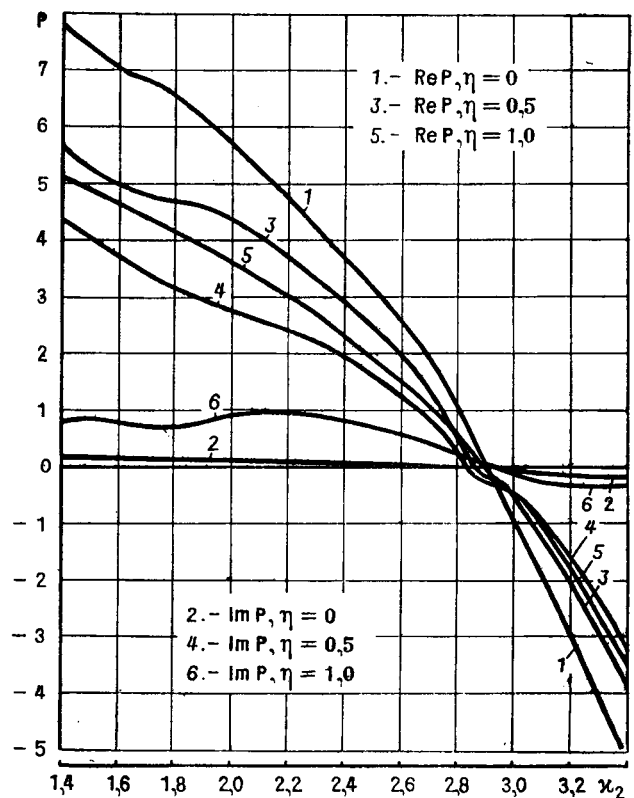


Рис. 2. Графики зависимости усилий от κ_2 при $a=3, \eta=0; 0,5; 1,0$

перед появлением новых вещественных особенностей ядра $K(\alpha)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабешко В. А. Об условиях излучения для упругого слоя. — ДАН, 213, 3, 1973.
2. Бабешко В. А. К теории динамических контактных задач. — ДАН, 201, 3, 1971.
3. Бабешко В. А. Интегральные уравнения свертки первого рода на системе отрезков, возникающие в теории механики и прикладной математики при РГУ

4. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М., 1974.
5. Александров В. М. К решению некоторых контактных задач теории упругости. — ПММ, 27, 5, 1963.

Поступила
20 июня 1977 г.