ISSN 0044-4669

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

# Журнал вычислительной математики и математической физики

ТОМ 27

№ 1 1987

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
Том 27, 1987 № 1

УДК 517.958:537.812

# МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ МАТРИЦЫ ГРИНА СТРАТИФИЦИРОВАННОГО УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

*БАБЕШКО В. А., ГЛУШКОВ Е. В., ГЛУШКОВА Н. В.*
*(Краснодар)*

Рассматриваются установившиеся гармонические колебания вертикально-неоднородного упругого полупространства, вызванные осциллирующей нагрузкой, приложенной к его поверхности. Приводятся методы численного построения матрицы Грина для непрерывно-неоднородного и слоистого полупространства, устойчивость которых обеспечивается выделением экспоненциальных составляющих в явном виде.

## Введение

В сейсмологии, геофизике, гидроакустике, механике композитов, дефектоскопии, фундаментостроении и ряде других областей науки и техники существует необходимость в анализе динамической реакции и волновых полей, возбуждаемых в упругой, вертикально-неоднородной (стратифицированной) среде поверхностными и внутренними источниками. При использовании точного интегрального представления решения соответствующей задачи теории упругости требуется построить матрицу Грина, с помощью которой перемещения частиц среды выражаются через поверхностные напряжения или объемные силы.

Начиная с работ [1]–[3] к настоящему времени разработан ряд подходов, основанных как на замене непрерывно-неоднородной (градиентной) среды многослойной (метод матриц-пропагаторов, или матричный метод), так и на прямом численном интегрировании краевых задач для систем дифференциальных по вертикальной координате $z$ уравнений (метод численного интегрирования) (см., например, [4]–[7]). Основные трудности реализации методов обусловлены наличием осциллирующих составляющих у фундаментальных решений соответствующих систем дифференциальных уравнений. Это приводит к неустойчивости численных процедур решения задач Коши и их дискретных аналогов и к плохой обусловленности линейных алгебраических систем, возникающих на заключительном этапе при удовлетворении граничных условий. Для преодоления указанных трудностей используются различные приемы; их обзор и сравнительный анализ дан, например, в [5]–[9]. Однако нельзя считать, что здесь уже сняты все проблемы и разработаны оптимальные алгоритмы; об этом, в частности, свидетельствует и относительный рост числа работ по данной проблеме в последние годы.

В [10]–[12] разработаны реализованные на ЭВМ и ныне использующиеся для практических исследований методы построения матрицы Грина, устойчивость которых обеспечивается выделением экспоненциальных составляющих. На базе этих алгоритмов исследованы дисперсионные и импедансные свойства упругого полупространства с различными законами стратификации, рассмотрено ее влияние на мощность поверхностного источника и распределение энергии, поступающей в среду, между волнами различных типов и по различным направлениям, выявлены неизвестные ранее резонансные явления в неоднородном полупространстве, сопровождающиеся появлением встречных потоков энергии [10]–[16]. Цель настоящей статьи – описать используемые алгоритмы построения матрицы Грина.

## § 1. Постановка задачи

Рассмотрим упругое полупространство, занимающее объем $-\infty\leqslant x,\ y\leqslant\leqslant\infty,\ -\infty\leqslant z\leqslant 0$, упругие характеристики Ляме которого $\lambda$, $\mu$ и плотность $\rho$ являются кусочно-непрерывными функциями координаты $z$. На поверхности $z=0$ в области $\Omega$ задана гармоническая нагрузка $\boldsymbol{\sigma}=\operatorname{Re}[\mathbf{q}(x,y)e^{-i\omega t}]$, вне $\Omega$ задано $\boldsymbol{\sigma}\equiv 0$ $(\boldsymbol{\sigma}=(\tau_{xz},\tau_{yz},\sigma_z)^{\mathsf{T}})$. Колебания частиц среды предполагаются установившимися по гармоническому закону $\mathbf{u}e^{-i\omega t}$, множитель $e^{-i\omega t}$ в дальнейшем опущен. При произвольной зависимости от времени $t$ задача усложняется необходимостью дополнительного интегрирования по частоте $\omega$; в настоящей работе эти вопросы не рассматриваются.

Перемещения частиц среды $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)^{\mathsf{T}}$ удовлетворяют уравнениям

$$(\lambda+\mu)\nabla\operatorname{div}\mathbf{u}+\mu\Delta\mathbf{u}+\rho\omega^2\mathbf{u}+\mathbf{D}(\mathbf{u})=0,$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{u})=\left(\mu'\left(\frac{\partial u_1}{\partial z}+\frac{\partial u_3}{\partial x}\right),\mu'\left(\frac{\partial u_2}{\partial z}+\frac{\partial u_3}{\partial y}\right),\lambda'\operatorname{div}u+2\mu'\frac{\partial u_3}{\partial z}\right)^{\mathsf{T}},$$

которые для однородной среды $(\lambda'=\mu'=0)$ совпадают с уравнениями Ляме. Штрихом здесь и в дальнейшем обозначено дифференцирование по $z$.

Точкам $z=z_l$, $l=2,3,\ldots,N$, соответствуют границы слоев $N$-слойной среды. При переходе через эти границы выполняется условие непрерывности напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и перемещений $\mathbf{u}$. На бесконечности требуется выполнение условий излучения, вытекающих из принципа предельного поглощения, что обеспечивает в дальнейшем однозначность выбора ветвей радикалов, присутствующих в решении, а также определяет направление обхода контуром интегрирования вещественных полюсов [10]. С помощью интегрального преобразования Фурье по $x$, $y$ перемещения $\mathbf{u}$ выражаются через поверхностные нагрузки $\mathbf{q}$ в виде свертки:

$$\mathbf{u}(x,y,z)=\iint\limits_{\Omega}k(x-\xi,y-\eta,z)\mathbf{q}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_{\Gamma_2}K(\alpha_1,\alpha_2,z)\mathbf{Q}(\alpha_1,\alpha_2)\exp[-i(\alpha_1x+\alpha_2y)]\,d\alpha_1\,d\alpha_2,$$

$$\mathbf{Q}(\alpha_1,\alpha_2)=\iint\limits_{\Omega}\mathbf{q}(\xi,\eta)\exp[i(\alpha_1\xi+\alpha_2\eta)]\,d\xi\,d\eta.$$

Матрица Грина $k$ имеет представление

$$k(x,y,z)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_{\Gamma_2}K(\alpha_1,\alpha_2,z)\exp[-i(\alpha_1x+\alpha_2y)]\,d\alpha_1\,d\alpha_2.$$

Контуры $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ почти всюду совпадают с вещественными осями, отклоняясь от них только при обходе вещественных полюсов символа матрицы

Грина $K(\alpha_1, \alpha_2, z)$ в соответствии с принципом предельного поглощения:

$$K(\alpha_1, \alpha_2, z) = \left\| \begin{matrix} -i\left(\dfrac{\alpha_1^2}{\alpha^2}M + \dfrac{\alpha_2^2}{\alpha^2}N\right) & -i\dfrac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha^2}(M-N) & -i\alpha_1 P \\ -i\dfrac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha^2}(M-N) & -i\left(\dfrac{\alpha_1^2}{\alpha^2}N + \dfrac{\alpha_2^2}{\alpha^2}M\right) & -i\alpha_2 P \\ \dfrac{\alpha_1}{\alpha^2}S & \dfrac{\alpha_2}{\alpha^2}S & R \end{matrix} \right\|,$$

где $\alpha = (\alpha_1^2+\alpha_2^2)^{1/2}$, $M$, $N$, $P$, $R$, $S$ — функции от $\alpha$, $z$, определяемые из следующих краевых задач:

$$\mathbf{Y}_1 = (P, P', R, R')^\tau, \qquad \mathbf{Y}_2 = (M, M', S, S')^\tau, \qquad \mathbf{X} = (N, N')^\tau,$$

(1.1) $\qquad d\mathbf{Y}_k/dz = A\mathbf{Y}_k, \quad k=1, 2, \qquad d\mathbf{X}/dz = B\mathbf{X},$

(1.2) $\qquad T\mathbf{Y}_k = \mathbf{e}_k, \qquad -i\mu X_2 = -i\mu N' = 1,$ при $z=0$,

(1.3) $\qquad G\mathbf{Y}_k, \quad H\mathbf{X}$ непрерывны в $z=\xi_l, \quad l=2, 3, \ldots, N.$

К (1.1)—(1.3) добавляются условия излучения при $z\to-\infty$. Здесь $A(\alpha, z)$ — матрица размера $4\times4$, $B(\alpha, z)$ — размера $2\times2$ с элементами $a_{12}=a_{34}=1$, $a_{41}=\alpha^2\lambda'/(\lambda+2\mu)$, $a_{21}=[\alpha^2(\lambda+2\mu)-\rho\omega^2]/\mu$, $a_{42}=\alpha^2(\lambda+\mu)/(\lambda+2\mu)$, $a_{22}=a_{23}=-\mu'/\mu$, $a_{43}=(\alpha^2\mu-\rho\omega^2)/(\lambda+2\mu)$, $a_{24}=-(\lambda+\mu)/\mu$, $a_{44}=-(\lambda'+2\mu')/(\lambda+2\mu)$, $b_{12}=1$, $b_{21}=(\alpha^2\mu-\rho\omega^2)/\mu$, $b_{22}=-\mu'/\mu$, остальные — нули;

$$T = \left\| \begin{matrix} -\lambda\alpha^2 & 0 & 0 & \lambda+2\mu \\ 0 & -i\mu & -i\mu & 0 \end{matrix} \right\|,$$

$$G(\alpha, z) = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \multicolumn{4}{c}{T} \end{matrix} \right\|, \quad H(\alpha) = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -i\mu \end{matrix} \right\|$$

$$\mathbf{e}_1 = \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\|, \qquad \mathbf{e}_2 = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right\|.$$

## § 2. Непрерывно-неоднородная (градиентная) стратификация

Итак, имеем три краевые двухточечные задачи (1.1)—(1.3). Общий метод их решения — сведение к задаче Коши путем переноса граничных условий в одну точку. Для полубесконечного интервала $-\infty\leqslant z\leqslant 0$ переносятся не граничные условия, а информация о поведении решения при $z\to-\infty$. Предположим, например, что существуют пределы

$$A_\infty(\alpha) = \lim_{z\to-\infty} A(\alpha, z), \qquad B_\infty(\alpha) = \lim_{z\to-\infty} B(\alpha, z).$$

Это условие выполняется, если $\lambda$, $\mu$, $\rho$ при $z\to-\infty$ стремятся к постоянным значениям либо растут степенным образом. Допускается также экспоненциальный рост с одинаковыми показателями.

Известно [17], что в окрестности произвольной точки $z_0$ решение систем (1.1) имеет представление

(2.1а) $$\mathbf{Y}_k(\alpha, z) \sim \sum_{s=1}^{4} t_{ks}\mathbf{m}_s \exp(\gamma_s z),$$

(2.1б) $$\mathbf{X}(\alpha, z) \sim \sum_{r=1}^{2} p_r\mathbf{n}_r \exp(\delta_r z), \qquad z\to z_0,$$

$\gamma_s(\alpha)$, $\delta_r(\alpha)$ — собственные значения, а $\mathbf{m}_s$ $\mathbf{n}_r$ — соответствующие собственные векторы матриц $A(\alpha, z_0)$, $B(\alpha, z_0)$; $t_{ks}(\alpha)$, $p_r(\alpha)$ — неизвестные, не зависящие от $z$.

В частности, $\gamma_s$, $\delta_r$, $\mathbf{m}_s$, $\mathbf{n}_r$ при $z\to-\infty$ соответствуют матрицам $A_\infty$, $B_\infty$.

Условия излучения допускают в (2.1) только слагаемые, соответствующие таким $\gamma_s$, что $\mathrm{Re}\,\gamma_s\geqslant0$, $\mathrm{Im}\,\gamma_s\leqslant0$ (их всегда два: $s=1, 2$) и $\delta_1$ : $\mathrm{Re}\,\delta_1\geqslant0$, $\mathrm{Im}\,\delta_1\leqslant0$ (всегда одно). Пусть $\mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_2$ — линейно независимые векторы, ортогональные $\mathbf{m}_1$, $\mathbf{m}_2$, а $\mathbf{p}$ — ортогональный $\mathbf{n}_1$. Тогда справедливы условия

$$(\mathbf{l}_j, \mathbf{Y}_k)=0, \quad j=1, 2, \quad k=1, 2, \qquad (\mathbf{p}, \mathbf{X})=0 \quad \text{при } z\to-\infty. \tag{2.2}$$

Считая, что условия (2.2) с заданной точностью выполняются начиная с некоторого $z_1$, получаем возможность переносить их из $z=z_1$ в $z=0$. Однако даже с использованием методов А. А. Абрамова и ортогональной прогонки из-за наличия экспоненциальных составляющих в переносимых векторах не удалось на практике реализовать численный перенос условий (2.2), устойчивый в достаточно широком диапазоне изменения параметров. Выделить эти составляющие помогает известная структура (2.1) решения систем (1.1).

Будем искать решение в виде

$$\mathbf{Y}_k=\sum_{s=1}^{2} t_{ks}(\alpha)\,\mathbf{a}_s(\alpha, z)\exp(\gamma_s z), \tag{2.3а}$$

$$\mathbf{X}=p(\alpha)\,\mathbf{b}(\alpha, z)\exp(\delta_1 z). \tag{2.3б}$$

Из (1.1) относительно неизвестных $\mathbf{a}_s$, $\mathbf{b}$ приходим к следующим задачам Коши:

$$da_s/dz=(A-\gamma_s E)a_s, \qquad db/dz=(B-\delta_1 E)b, \tag{2.4а}$$

$$a_s\to m_s \quad \text{при } z\to-\infty, \quad s=1, 2, \qquad b\to n_1 \quad \text{при } z\to-\infty. \tag{2.4б}$$

Неизвестные $t_{ks}$, $p$ определяются из условий (1.2) при $z=0$ после нахождения $\mathbf{a}_s(\alpha, 0)$, $\mathbf{b}(\alpha, 0)$ из (2.4).

Таким образом, составляющие $\exp(\gamma_s z)$, $\exp(\delta_1 z)$ исключаются из рассмотрения, отыскиваются только модулирующие их функции $\boldsymbol{\alpha}_s$, $\mathbf{b}$, которые изменяются по $z$ более плавно, а при $z\to-\infty$ стремятся к постоянным значениям (правая часть равенств (2.4а) при этом стремится к нулю).

При наличии резких изменений $\lambda$, $\mu$, $\rho$ представление (2.3) уже не соответствует структуре решения на всем интервале $-\infty\leqslant z\leqslant0$, так как искомые функции $\mathbf{a}_s$, $\mathbf{b}$ в силу (2.1) содержат экспоненциальные составляющие, показатели которых тем больше, чем больше различаются собственные значения матриц $A$, $B$ и $A_\infty$, $B_\infty$. Возможны два пути модификации представления (2.3) с целью выделения экспонент на всем интервале.

Первый способ. Возьмем $\gamma_s$, $\delta_1$ в (2.3) зависящими непрерывно от $z$:

$$\det[A-\gamma_s(\alpha, z)E]=0, \qquad \det[B-\delta_1(\alpha, z)E]=0.$$

Имеем

$$d\mathbf{a}_s/dz=[A-(\gamma_s+\gamma_s' z)E]\mathbf{a}_s, \qquad \mathbf{a}_s\to\mathbf{m}_s, \quad z\to-\infty, \tag{2.5а}$$

$$d\mathbf{b}/dz=[B-(\delta_1+\delta_1' z)E]\mathbf{b}, \qquad \mathbf{b}\to\mathbf{n}_1, \quad z\to-\infty. \tag{2.5б}$$

Здесь экспоненты исключены полностью, однако за это приходится платить дополнительным машинным временем, необходимым для определения $\gamma_s$, $\delta_1$ на каждом шаге численного интегрирования. Кроме того, производные от $\gamma_s$, $\delta_1$ в точках ветвления последних имеют разрывы II рода. При численном интегрировании систем (2.5) эти точки можно пройти, только модифицировав соответствующим образом используемый численный метод.

Второй способ. Интервал $-\infty\leqslant z\leqslant 0$ точками $z_l$, $l=1, 2, \ldots, N$, разбивается на такие участки, на которых элементы матриц $A$ и $B$ меняются достаточно плавно. На каждом из участков решение отыскивается в виде

$$\mathbf{Y}_l=\sum_{s=1}^{4} t_{ls}(\alpha)\mathbf{a}_{ls}(\alpha, z)\exp[\gamma_{ls}(\alpha)z],$$

$$\mathbf{X}_l=\sum_{r=1}^{2} p_{lr}(\alpha)\mathbf{b}_{lr}(\alpha, z)\exp[\delta_{lr}(\alpha)z],$$

$\gamma_{ls}$, $\delta_{lr}$ — собственные значения матриц $A(\alpha, z_{l+1})$, $B(\alpha, z_{l+1})$. Для $z\in\in[-\infty, z_N]$ (нижнее полупространство) сохраняется представление (2.3). Величины $\mathbf{a}_{ls}$, $\mathbf{b}_{lr}$ определяются из задач Коши, аналогичных задачам (2.4). В качестве начальных условий для $\mathbf{a}_{ls}$, $\mathbf{b}_{lr}$ принимаются $\mathbf{m}_{ls}$, $\mathbf{n}_{lr}$ — собственные векторы матриц $A(\alpha, z_{l+1})$, $B(\alpha, z_{l+1})$, соответствующие $\gamma_{ls}$, $\delta_{lr}$. Для определения $t_{ls}$, $p_{lr}$ используются условия непрерывности $\mathbf{Y}_l$ и $\mathbf{X}_l$ в точках $z_l$, которые приводят к алгебраическим системам размерности $4N-2$ и $2N-1$. При больших $N$ решение этих систем представляет собой некорректную задачу.

Пути преодоления возникающих здесь трудностей покажем на примере алгоритма для слоистого полупространства.

## § 3. Слоистое полупространство

Пусть $S_l=\{-\infty\leqslant x, y\leqslant\infty,\ z_{l+1}\leqslant z\leqslant z_l\}$ — однородные слои с характеристиками $\lambda_l$, $\mu_l$, $\rho_l$, $l=1, 2, \ldots, N$, $z_1=0$, $z_{N+1}=-\infty$. Между слоями предполагается равенство напряжений и перемещений, т. е. условия (1.3). В каждом слое искомые $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ имеют вид

$$\mathbf{Y}_l=\sum_{s=1}^{4} t_{ls}\mathbf{m}_{ls}\exp(\gamma_{ls}z),$$

$$\mathbf{X}_l=\sum_{r=1}^{2} p_{lr}\mathbf{n}_{lr}\exp(\delta_{lr}z), \qquad z\in S_l, \qquad l=1, 2, \ldots, N,$$

$\gamma_{ls}$, $\delta_{lr}$ — собственные значения, $\mathbf{m}_{ls}$, $\mathbf{n}_{lr}$ — соответствующие им собственные векторы матриц $A_l=A(\alpha, z)$, $B_l=B(\alpha, z)$, $z\in S_l$. Для однородных сред можно выписать их явный вид:

$$\gamma_{lk}=\sigma_{lk}, \qquad \gamma_{l,\,k+2}=-\sigma_{lk}, \qquad \delta_{l1}=\sigma_{l2}, \qquad \delta_{l2}=-\sigma_{l2},$$

$$\sigma_{lk}=(\alpha^2-\varkappa_{lk}^2)^{1/2}, \qquad \operatorname{Re}\sigma_{lk}\geqslant 0, \qquad \operatorname{Im}\sigma_{lk}\leqslant 0, \qquad k=1,\ 2,$$

$$\varkappa_{l1}^2=\frac{\rho_l\omega^2}{\lambda_l+2\mu_l}, \qquad \varkappa_{l2}^2=\frac{\rho_l\omega^2}{\mu_l}, \qquad l=1, 2, \ldots, N,$$

$$\mathbf{m}_{l1}=\begin{Vmatrix} 1\\ \sigma_{l1}\\ \sigma_{l1}\\ \sigma_{l1}^2\end{Vmatrix}, \qquad \mathbf{m}_{l2}=\begin{Vmatrix} \sigma_{l2}\\ \sigma_{l2}^2\\ \alpha^2\\ \alpha^2\sigma_{l2}\end{Vmatrix}.$$

$$\mathbf{m}_{l3}=\left\|\begin{matrix}1\\-\sigma_{l1}\\-\sigma_{l1}\\\sigma_{l1}^2\end{matrix}\right\|,\qquad \mathbf{m}_{l4}=\left\|\begin{matrix}-\sigma_{l2}\\\sigma_{l2}^2\\\alpha^2\\-\alpha^2\sigma_{l2}\end{matrix}\right\|,\qquad \mathbf{n}_{l1}=\left\|\begin{matrix}1\\\sigma_{l2}\end{matrix}\right\|,$$

$$\mathbf{n}_{l2}=\left\|\begin{matrix}1\\-\sigma_{l2}\end{matrix}\right\|.$$

При $l=N$ (нижнее полупространство) в соответствии с условиями излучения $t_{N3}=t_{N4}=p_{N2}=0$.

Условия на границах слоев (1.3) принимают вид

(3.1а) $\qquad G_l\mathbf{Y}_l(\alpha, z_{l+1})=G_{l+1}\mathbf{Y}_{l+1}(\alpha, z_{l+1}),$

(3.1б) $\qquad H_l\mathbf{X}_l(\alpha, z_{l+1})=H_{l+1}\mathbf{X}_{l+1}(\alpha, z_{l+1}), \qquad l=1, 2, \ldots, N,$

$$G_l=G(\alpha, z_l), \qquad H_l=H(z_l).$$

Введем векторы неизвестных $\mathbf{t}_l=\{t_{l1}, t_{l2}, t_{l3}, t_{l4}\}$, $\mathbf{p}_l=\{p_{l1}, p_{l2}\}$ и $\mathbf{t}_N=\{t_{N1}, t_{N2}\}$, $\mathbf{p}_N=\{p_{N1}\}$. Относительно $\mathbf{t}_l$, $\mathbf{p}_l$ условия (3.1) приводят к линейным алгебраическим системам

(3.2) $\qquad C_l(z_{l+1})\mathbf{t}_l-C_{l+1}(z_{l+1})\mathbf{t}_{l+1}=0,$

$\qquad P_l(z_{l+1})\mathbf{p}_l-P_{l+1}(z_{l+1})\mathbf{p}_{l+1}=0,$

$\qquad C_l(z)=G_lM_l(z), \qquad P_l(z)=H_lN_l(z), \qquad l=1, 2, \ldots, N-1.$

Столбцами $M_l$, $N_l$ при $l\neq N$ являются векторы $\mathbf{m}_{lj}$, $\mathbf{n}_{lk}$, $j=1, 2, 3, 4$, $k=1, 2$, домноженные на диагональные матрицы $\operatorname{diag}[\exp(\sigma_{l1}z), \exp(\sigma_{l2}z), \exp(-\sigma_{l1}z), \exp(-\sigma_{l2}z)]$ и $\operatorname{diag}[\exp(\sigma_{l2}z), \exp(-\sigma_{l2}z)]$ соответственно. При $l=N$ матрица $C_N$ – размера $4\times 2$, $j=1, 2$, $P_N$ – размера $2\times 1$, $k=1$.

Условия на поверхности (1.2) относительно $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{p}_1$ переписываются в виде

(3.3) $\qquad S\mathbf{t}_1=\mathbf{e}_k, \quad z=0, \quad k=1, 2, \qquad R\mathbf{p}_1=1, \quad z=0,$

$\qquad S=TM_1(0), \qquad R=(-i\mu_1\sigma_{12}, i\mu_1\sigma_{12}).$

Соотношения (3.1), (3.3) представляют собой две системы блочно-диагональной структуры, которая позволяет выразить $\mathbf{t}_l$ через $\mathbf{t}_{l+1}$ $\mathbf{p}_l$ через $\mathbf{p}_{l+1}$:

(3.4) $\qquad \mathbf{t}_l=C_l^{-1}(z_{l+1})C_{l+1}(z_{l+1})\mathbf{t}_{l+1},$

$$\mathbf{p}_l=P_l^{-1}(z_{l+1})P_{l+1}(z_{l+1})\mathbf{p}_{l+1}.$$

Дальнейшее изложение для краткости ведется только относительно $\mathbf{t}_l$, для $\mathbf{p}_l$ результат получается аналогичным образом.

Из (3.4) следует

(3.5) $\qquad \mathbf{t}_1=C_1^{-1}(z_2)C_2(z_2)C_2^{-1}(z_3)C_3(z_3)\ldots C_N(z_N)\mathbf{t}_N=D\mathbf{t}_N,$

матрица $D$ – размера $4\times 2$. Далее из (3.3) относительно $\mathbf{t}_N$ получаем системы размерности $2\times 2$:

(3.6) $\qquad SD\mathbf{t}_N=\mathbf{e}_k, \qquad k=1, 2,$

решив которые, остальные $\mathbf{t}_l$ определяем обратным ходом с помощью (3.4).

Цепочка (3.5), осуществляющая перенос условий, заданных при $z\to-\infty$ (в данном случае это условия отсутствия компонент $t_{N3}$, $t_{N4}$) в точку $z=0$, является дискретным аналогом решения задачи Коши для системы (1.1) с начальными условиями (2.3), т. е. того случая, где еще не произведено выделение экспонент.

При ее реализации на ЭВМ наличие экспоненциальных множителей в $C_l$ быстро приводит к переполнению разрядных сеток машин или обращению в машинный нуль определителей этих матриц. Природа возникающих трудностей и возможные пути их преодоления хорошо видны на следующем примере. Функции $N(\alpha, z)$ в задаче о колебании слоя толщины $h$, жестко сцепленного с недеформируемым основанием, имеет вид [10]

$$N(\alpha, z) = \frac{i}{\mu} \operatorname{sh}[\sigma_2(z+h)][\sigma_2 \operatorname{ch}(\sigma_2 h)]^{-1}.$$

Построение элементов $K$ по формулам (3.4)–(3.6) эквивалентно нахождению по отдельности числителя и знаменателя этой функции, имеющих экспоненциальный рост при $\alpha h \to \infty$. В то же время сама функция $N(\alpha, z)$ убывает при $\alpha h \to \infty$ и может быть представлена в виде, не содержащем растущих экспонент:

$$N = \frac{i}{\mu} \{1-\exp[-2\sigma_2(z+h)]\}\{\sigma_2[1+\exp(-2\sigma_2 h)]\}^{-1} \exp(\sigma_2 z), \quad z \in [0, -h].$$

Алгоритм построения $K$ может быть модернизирован таким образом, чтобы ни на одном из этапов вычислений не появлялось экспоненциально растущих составляющих.

Введем новые неизвестные $\mathbf{s}_l$, связанные с $\mathbf{t}_l$ соотношениями

(3.7а) $\quad t_{l1} = s_{l1}, \quad t_{l2} = \exp(2\sigma_{l1} z_{l+1}) s_{l2},$

(3.7б) $\quad t_{l3} = \exp[(\sigma_{l1} - \sigma_{l2}) z_{l+1}] s_{l3},$

(3.7в) $\quad t_{l4} = \exp[(\sigma_{l1} + \sigma_{l2}) z_{l+1}] s_{l4}, \quad l \neq N;$

(3.8) $\quad t_{l1} = s_{l1}, \quad t_{l2} = \exp[(\sigma_{l1} - \sigma_{l2}) z_{l+1}] s_{l2}, \quad l = N.$

Тогда относительно новых неизвестных имеем

$$C_l(z_{l+1}) \mathbf{t}_l = \exp(\sigma_{l1} z_{l+1}) C_l(0) \mathbf{s}_l,$$

$$C_{l+1}(z_{l+1}) \mathbf{t}_{l+1} = \exp(\sigma_{l+1,1} z_{l+1}) C_{l+1}(0) E_{l+1} \mathbf{s}_{l+1},$$

$E_{l+1}$ — диагональная матрица с элементами

$$e_{11} = 1, \quad e_{22} = \exp[(\sigma_{l+1,1} - \sigma_{l+1,2})(z_{l+2} - z_{l+1})],$$

$$e_{33} = \exp[2\sigma_{l+1,1}(z_{l+2} - z_{l+1})],$$

$$e_{44} = \exp[(\sigma_{l+1,1} + \sigma_{l+1,2})(z_{l+2} - z_{l+1})].$$

Вещественная часть показателей экспонент в (3.8) может быть только отрицательной, так как $z_{l+2} - z_{l+1} < 0$, а $\operatorname{Re} \sigma_{l1} \geqslant \operatorname{Re} \sigma_{l2}$, т. е. элементы матрицы $E_{l+1}$ по модулю не могут быть больше единицы.

Экспоненциальные множители, появляющиеся в результате замены перед матрицами $C_l(0)$, $C_{l+1}(0)$ в условиях (3.2), можно не учитывать в процессе определения $\mathbf{s}_l$, а ввести их уже при формировании окончательного решения $\mathbf{Y}_l$.

Приведем алгоритм построения матрицы Грина, полученный на основе указанной замены и не содержащей растущих экспонент ни на одном из этапов.

Шаг 1. $D_l = C_l^{-1}(0) C_{l+1}(0) E_{l+1}, \quad Q_l = P_l^{-1}(0) P_{l+1}(0) F_{l+1}, \quad l = 1, 2, \ldots$ $\ldots, N-1, N \geqslant 2.$

Шаг 2. $D = D_1 \cdots D_{N-1}, \ Q = Q_1 \cdots Q_{N-1}.$

Шаг 3. $\mathbf{s}_N = (SGD)^{-1} \mathbf{e}_k, \ k = 1, 2, \ \mathbf{r}_N = (RHQ)^{-1}.$

Шаг 4. $\mathbf{s}_l=D_l\mathbf{s}_{l+1}$, $l=N-1,\ldots,2,1$, $\mathbf{r}_l=Q_l\mathbf{r}_{l+1}$.

Шаг 5. $\mathbf{Y}_l(\alpha,z)=M_l(0)U_l\mathbf{s}_l$, $\mathbf{X}_l(\alpha,z)=N_l(0)V_l\mathbf{r}_l$.

Здесь $N\geqslant 2$, $F_{l+1}=\operatorname{diag}(1,\exp[2\sigma_{l+1,2}(z_{l+2}-z_{l+1})])$;

$$G=\operatorname{diag}(1,\exp[(\sigma_{l1}-\sigma_{l2})z_{l+1}],\exp(2\sigma_{l1}z_{l+1}),$$

$$\exp[(\sigma_{l1}+\sigma_{l2})z_{l+1}]),$$

$$H=\operatorname{diag}(1,\exp(2\sigma_{l,2}z_{l+1})),\qquad l=1;$$

$$U_l=\operatorname{diag}(\exp(\sigma_{l1}z),\exp[(\sigma_{l-1}-\sigma_{l-2})z_{l+1}+\sigma_{l2}z],$$

$$\exp(2\sigma_{l1}z_{l+1}-\sigma_{l1}z),\ \exp[(\sigma_{l1}+\sigma_{l,2})z_{l+1}-\sigma_{l2}z])-\Sigma_lE,$$

$$V_l=\operatorname{diag}(\exp(\sigma_{l,2}z),\exp(-\sigma_{l,2}z+2\sigma_{l,2}z_{l+1}))-\Pi_lE,\qquad l\neq N;$$

$$\Sigma_l=\sum_{n=1}^{l-1}(\sigma_{n+1,1}-\sigma_{n1})z_{n+1},\qquad \Sigma_1=0,$$

$$\Pi_l=\sum_{n=1}^{l-1}(\sigma_{n+1,2}-\sigma_{n2})z_{n+1},\qquad \Pi_1=0.$$

При $l=N$ матрица $U_l$ — размера $2\times 2$, $V_l$ — размера $1\times 1$.

Характерной особенностью приведенного алгоритма является то, что после построения $\mathbf{s}_l$, $\mathbf{r}_l$, $l=1,2,\ldots,N$, компоненты матрицы $K$ (т. е. векторы $\mathbf{X}_l$, $\mathbf{Y}_l$) без существенных вычислительных затрат могут быть определены по формулам шага 5 для произвольного числа точек $z$. Т. е. можно организовать процесс так, чтобы матрица $K(\alpha,z)$ (а следовательно, и волновые поля) определялась для различных глубин одновременно. Это же замечание справедливо и для алгоритмов, разработанных для непрерывно-неоднородной среды.

Приведенные выше алгоритмы естественным образом обобщаются на случай многослойной среды с непрерывно изменяющимися свойствами каждого слоя.

Матрицы $C_l$, $P_l$ при этом в соответствии с (3.1) выражаются через $\mathbf{m}_{ls}$, $\mathbf{n}_{ls}$, $\mathbf{a}_{ls}(\alpha,z_l)$, $\mathbf{b}_{lr}(\alpha,z_l)$, причем их столбцы, как и в случае кусочно-однородной среды, содержат множители вида $\exp(\gamma_{ls}z)$, $\exp(\delta_{lr}z)$, что требует проведения нормировки, аналогичной (3.7).

## § 4. Замечания

1. При численном решении задач Коши фактически происходит замена непрерывной неоднородности набором дискретных значений. Однако, в отличие от широко распространенного способа моделирования произвольной стратификации набором однородных слоев, здесь через $\lambda'$, $\mu'$ удерживается информация о скорости изменения свойств среды.

2. Опыт эксплуатации программ, реализующих приведенные алгоритмы, показал, что основная часть машинного времени идет на решение задач Коши, поэтому не следует в тех случаях, когда закон стратификации среды известен приближенно (например, в геофизических моделях), требовать высокой точности их решения. Уже несколько шагов простейшей конечно-разностной схемы дают более точную информацию о волновых полях в непрерывно-неоднородной среде, чем при замене ее набором однородных слоев.

3. Участки быстрого изменения $\lambda(z)$, $\mu(z)$, $\rho(z)$ ($\lambda'$, $\mu'$ велики) выгоднее моделировать разрывом I рода (граница слоев, $\lambda'$, $\mu'$ малы).

4. Описание алгоритмов дано для поверхностных источников; для внутренних источников, описываемых объемными силами, требуется их несущественно модифицировать.

5. Достоверность результатов проверялась путем сопоставления их с известными для некоторых частных случаев стратификации и с полученными другими способами. Кроме того, проверялся баланс энергии, поступающей от источника в полупространство [13], [15].

## Литература


1. *Thomson W. T.* Transmission of elastic waves through a stratified medium // J. Appl. Phys. 1950. № 21. P. 89–93.
2. *Haskell N. A.* The dispersion of surface waves on multilayered media // Bull. Seismol. Soc. America. 1953. V. 43. P. 17–34.
3. *Петрашень Г. И.* Распространение упругих волн в слоисто-изотропных средах, разделенных параллельными плоскостями // Уч. зап. ЛГУ. Л., 1952. Вып. 26. № 162.
4. *Satö J.* Numerical integration of the equation of motion for surface waves in a medium with arbitrary variation of material constants // Bull. Seismol. Soc. America. 1959. V. 49. P. 57–77.
5. *Knopoff L.* A matrix method for elastic waves problems // Bull. Seismol. Soc. America. 1964. V. 54. P. 431–438.
6. *Dunkin J. W.* Computations of modal solutions in layered elastic media at high frequencies // Bull. Seismol. Soc. America. 1965. V. 55. P. 335–358.
7. *Алексеев А. С., Михайленко Б. Г.* Решение задачи Лэмба для вертикально-неоднородного упругого полупространства // Изв. АН СССР. Физ. Земли. 1976. № 12. С. 11–25.
8. *Franssens G. R.* Calculation of the elastodynamic Green's function in layered media by means of a modified propagator matrix method // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 1983. V. 75. № 3. P. 669–691.
9. *Chin R. C. J., Hedstrom G. W., Thigpen L.* Matrix methods in synthetic seismograms // Geophys. J. Roy. Astron. Soc. 1984. V. 77. № 2. P. 483–502.
10. *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Глушкова Н. В.* К расчету динамической прочности вязкоупругого неоднородного по глубине полупространства при произвольной форме области контакта // Тезисы докл. VII Всес. научн. конф. по прочности и пластичности. Горький, 1978. С. 12.
11. *Глушков Е. В., Глушкова Н. В.* Расчет энергии упругих волн, возбуждаемых поверхностными источниками в стратифицированном полупространстве.– Деп. в ВИНИТИ 24.12.81, № 5827-81.
12. *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Глушкова Н. В.* Расчет энергетического баланса неоднородного полупространства.– Деп. в ВИНИТИ 8.07.82, № 3630-82.
13. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979.
14. *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф.* К расчету сейсмического источника с заданной направленностью излучения // Докл. АН СССР. 1982. Т. 262. № 4. С. 831–834.
15. *Глушков Е. В.* Распределение энергии поверхностного источника в неоднородном полупространстве // Прикл. матем. и механ. 1983. Т. 47. № 1. С. 94–100.
16. *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Глушкова Н. В.* Численное исследование распределения энергии поверхностного виброисточника в многослойном упругом полупространстве.– Деп. в ВИНИТИ 31.05.84, № 3545-84.
17. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1964.



Поступила в редакцию 23.V.1985

Переработанный вариант 24.III.1986